Gerlinde FAUSTMANN
BRG, Wr. Neustadt

Die Geschichte der Logarithmen.

0. Einleitung

Blättert man die Mathematiklehrpläne der letzten hundert Jahre durch, so entdeckt man, daß zumindest in einigen Lehrplänen historische Entwicklungen bzw. Bedeutungen als Inhalte zu finden sind. In älteren Mathematiklehrbüchern kann man kaum historische Bemerkungen finden. Lediglich in die aktuellen Schulbücher haben sich durch grün- oder kleingedruckte Texte geschichtliche Überblicke eingeschlichen.

Im aktuellen Lehrplan der 6. Klasse heißt es explizit: "Allenfalls Kennen der (historischen) Bedeutung der Logarithmen (Logarithmentafel, Rechenstab)".

Dies soll als kleine Motivation für diesen Vortrag dienen, der in folgende Kapitel gegliedert ist:

- Entwicklungsschritte zu den Logarithmen
- Die ersten Logarithmentafeln
- Berechnungsmethoden für Logarithmen

1. Entwicklungsschritte zu den Logarithmen

Die ersten Gedanken zur Entwicklung des Logarithmus kann man bei den **Babyloniern (ca. 1600 v. Chr.)** in ihren Tafeln der Potenzen einer bestimmten Basis erkennen.[1] In **Euklids (365 - 300 v. Chr.)** "Elemente", Buch IX, Satz 11, findet man eine allgemeine Aussage, die zur Regel $a^m : a^n = a^{m-n}$ für positive ganze Exponenten äquivalent ist. **Archimedes (287 - 212 v. Chr.)** kam im Zuge seiner berühmten Sandkörnerrechnung zu einer rasch ansteigenden Zahlenfolge. Er benützte eine einfache Methode, indem er der Reihe nach Potenzen von 10^8 konstruierte, und er fand folgendes heraus:
"Wenn von Zahlen, die von der Einheit ab in festem Verhältnis stehen, irgend zwei miteinander multipliziert werden, so wird auch der beiden Faktoren ebenso weit abstehen, wie der kleinere von der Einheit in der Zahlenfolge absteht; von der Einheit aber wird es um eine Stelle weniger weit abstehen, als die Abstandszahlen beider Faktoren von der Einheit aus zusammen betragen."[2]

[1] Hans Kaiser - Wilfried Nöbauer, Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. (Wien 1984) S. 11, 12.
[2] Erwin Voellmy, Jost Bürgi und die Logarithmen. In: Beiheft Nr. 5 zur Zeitschrift Elemente der Mathematik. (Basel 1948) S. 3.

Archimedes verstand unter Abstandszahl die Nummer des entsprechenden Folgengliedes. Da sein erstes Folgenglied stets 1 war, subtrahierte er nach der Multiplikation 1, um dann die entsprechend richtige Nummer zu erhalten. Die Griechen kannten jedoch keine Potenzschreibweise, denn sie verwendeten ihre Buchstaben als feste Zahlen.

Archimedes hätte somit schon im 3. Jahrhundert v. Chr. die Logarithmen entdecken können, wenn ihm Potenzen und somit die Multiplikation von Potenzen bekannt gewesen wären.

Einen Anfang für die Potenzbezeichnungen brachte die "Arithmetik" des **Diophant von Alexandria (um 250 n. Chr.)**. "Er führte für die Unbekannte ein eigenes Zeichen ein: ξ (xi, vielleicht als Abkürzung für griechisch xenos, fremd), einen Vorläufer unseres notorischen x, und gab den Potenzen von ξ bis einschließlich der sechsten eigene Namen und Symbole".[3]

DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA

THE ARITHMETICA

(1)	$\dot{M}$	= Μόνας	= unity
(s)	ς	= Ἀριθμός	= number
(s^2)	Δ^Y	= Δύναμις	= square
(s^3)	K^Y	= Κύβος	= cube
(s^4)	$\Delta^Y\Delta$	= Δυναμοδύναμις	= square x square
(s^5)	ΔK^Y	= δυναμόχυβος	= square x cube
(s^6)	$K^Y K$	= Κυβόχυβος	= cube x cube

Erst um **1200** findet man wieder eine schwache Spur von Archimedes' Gedanken. **Jordanus Nemorarius** verwendete die archimedische Regel bei der Multiplikation von Sexagesimalbrüchen, auch er kannte noch keine Potenzen.

Im Mittelalter entdeckte der französische Mathematiker **Nicole Oresme (1323? - 1382)** diese Regel aufs Neue. Bei ihm kamen auch zum ersten Male gebrochene Exponenten mit einer Bezeichnungsweise vor, die schon nahe der unseren liegt. Doch die Vorstellungen von Oresme waren der Mathematik seiner Zeit so weit voraus, daß sie auf seine Zeitgenossen kaum einen Einfluß ausübten, sein Werk sank schnell wieder in Vergessenheit."[4]

---

[3]Klaus Volkert, Anschauung und Formalismus in der Mathematik. In: Spektrum der Wissenschaft (März 3/1992) S. 75.
[4]Nicolas Bourbaki, Elemente der Mathematikgeschichte. (Göttingen 1971) S. 183.

Im Hauptwerk "Summa" von **Luca Paciuoli (1445? - 1517)** findet man Wortbezeichnungen für Potenzen.

Pacioli's *Summa* (1494)

℞.pª		numero
℞.2ª	2	cosa
℞.3ª	4	censo
℞.4ª	8	cubo
℞.5ª	16	censo di censo
℞.6ª	32	primo relato
℞.7ª	64	censo di cubo o cubo di censo
℞.8ª	128	secondo relato
℞.9ª	256	censo di censo di censo

Der französische Arzt und Mathematiker **Nicolas Chuquet (1445? - 1488?)** stellte in seinem handschriftlich überlieferten Werk "Triparty en la science des nombres" eine Doppelfolge auf wie

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ 1 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 \ldots \end{array}$$

und formulierte folgenden Satz: "*Das Produkt zweier Glieder der unteren Folge ist ein Glied derselben Folge und zwar ist sein Nenner gleich der Summe der Nenner der Faktoren.*"[5] Unter Nenner verstand er die Glieder der oberen Folge. Ähnliche Betrachtungen findet man bei einigen Rechenmeistern um 1500.

"**Christoff Rudolff (1500? - 1545?)**, der einen Großteil seines Lebens in Wien verbracht hat, schrieb eines der ersten gedruckten Werke, in dem Dezimalbrüche und unser Wurzelzeichen verwendet werden."[6] Er bemerkte, "daß man die Division durch eine Zehnerpotenz durch Abschneiden "mit einer virgel" (virgula, lat. = Stab, Strich) ausführen kann und zeigt sich damit als ein Vorläufer der Dezimalbruchschreibweise."[7] In seiner "Coß" bildete er eine geometrische Progression, die er mit 1 beginnen ließ. Er bemerkte, daß jede dritte Zahl ein Quadrat und jede vierte Zahl ein Kubus sei. Er benannte die Zahlen "nach natürlicher Ordnung" mit dragma, radix, zensus, cubus, zens de zens usw. und bezeichnete sie der Kürze

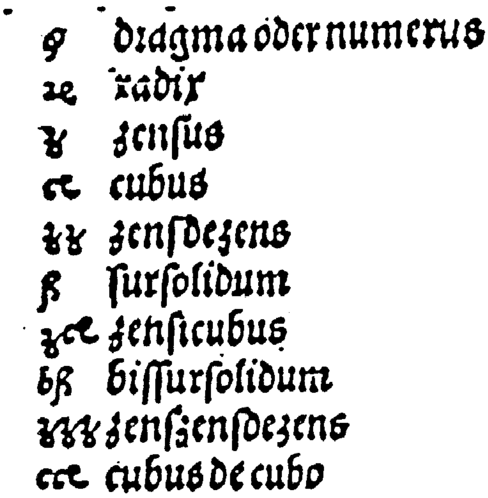
---

[5] Voellmy, Logarithmen, S. 4.
[6] Kaiser-Nöbauer, Geschichte, S. 34.
[7] Lexikon bedeutender Mathematiker, Hrsg.: Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgauds, Karl-Heinz Schlote, S. 406.

halber mit den Buchstaben φ, κ, z, ce, zz usw.[8] Er stellte eine Tafel solcher Folgen in ganzen und gebrochenen Zahlen auf und gab Regeln für die Addition und Subtraktion an. Für die Multiplikation verwendete er "außer der Tafel der Potenzen, die er nach Art des Einmaleins anordnete, eine neue Bezeichnung, aus der offenbar unsere gegenwärtige Potenzbezeichnung hervorgegangen ist; er schrieb die Potenzreihe so:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varphi & \kappa & z & ce & zz\ldots, \end{array}$$

und bemerkte, daß man das Produkt zweier Potenzen findet, wenn die Summe der Zahlen, die über den zu multiplizierenden Potenzen stehen, gebildet wird. Entsprechend wird bei der Division der Quotient durch Subtraktion der darüberstehenden Zahlen gefunden."[9]


φ dragma oder numerus
r radix
z zensus
ce cubus
zz zensdezens
ß sursolidum
zce zensicubus
bß bissursolidum
zzz zenszensdezens
cce cubus de cubo

Rudolff's *Coss* (1525)

Dieses Werk Rudolffs, welches 1525 in Straßburg gedruckt wurde, bildete die Grundlage für die eigenen Gedanken von **Michael Stifel (1487? - 1567).**[10] Als dieser seines Amtes als Pfarrer enthoben wurde, da er für den 19. Oktober 1533 den Weltuntergang vorhersagte, fand er genug Zeit, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Er erhielt jedoch bald wieder eine Anstellung als Pfarrer und begann selbst ein mathematisches Werk zu verfassen.[11] In diesem

[8] C. J. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland. In: Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. 17. Band (München 1877) S. 55, 56.

[9] Ebd. S. 56.

[10] Allgemeine Deutsche Biographie, 29. Band. Hrsg. durch die historische Commission bei der königl. Akademie der Wissenschaften. (Leipzig 1889) S. 571.

[11] August Gutzmer, Zum Jubiläum der Logarithmen. In: Festschrift der Universität Halle. (Leipzig 1915) S. 6.

berühmten Werk mit dem Titel "*Arithmetica integra*" aus dem Jahre 1544 erweiterte er Chuquets Doppelfolge um negative Zahlen

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \ldots \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \ldots \end{array}$$

Die Zahlen der oberen Folge nannte er "exponentes", die Ausgesetzten. Er erkannte, daß eine Addition in der oberen Folge der Multiplikation in der unteren Folge entsprach, gleiches fand er auch für die Subtraktion in Bezug auf die Division. Weiters zeigte er, daß die Multiplikation in der arithmetischen Folge das Analoge zum Potenzieren bei der geometrischen Folge war. "Er war also der erste Mathematiker, der die Theorie des logarithmischen Rechnens klar eingesehen und ausgedrückt hat."[12] Stifel sagte selbst "man könne über die wunderbaren Eigenschaften der Zahlen ein ganz neues Buch schreiben, aber er müsse sich dieser Versuchung entziehen und mit geschlossenen Augen von dannen gehen."[13] Somit hatte er die Theorie des logarithmischen Rechnens erkannt, es fehlte praktisch nur mehr ein einwandfreier Beweis. Die beiden Zahlenfolge waren für das praktische Rechnen zu lückenhaft, man kannte noch keine Dezimalbrüche, um zu einer Verdichtung dieser Zahlenfolgen zu gelangen.[14] **Simon Jacob (? - 1564)** hatte die Bemerkungen Stifels genau und für die damalige Zeit leicht verständlich wiedergegeben.

François Viète (Vieta) (1540 - 1603) führte in seinem Werk "*In artem analyticem isagoge*", welches größten Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik ausübte, feste Bezeichnungen für die Potenzen ein.[15] In seinem "*Canon mathematicus*" aus dem Jahre 1579 bevorzugte er die Dezimalbrüche gegenüber den Sexagesimalbrüchen und unterschied sie durch kleinere Typen von den ganzen Zahlen. Außerdem trennte er sie noch durch einen senkrechten Strich, den man als Vorgänger des späteren Dezimalpunktes bezeichnen kann, von den ganzen Stellen.[16]

Als Erfinder der Dezimalbrüche gilt **Simon Stevin (1548 - 1620)**, der vorschlug, die Brüche durch Dezimalzahlen zu ersetzen, und unendliche Dezimalzahlen einführte.[17] Er forderte die Einführung des Dezimalsystems für Maße und Münzen, verwendete aber keinen Dezimalpunkt bzw. -komma.[18]

---

[12] Voellmy, Logarithmen, S. 5.
[13] Gutzmer, Jubiläum d. Log., S. 9.
[14] Voellmy, Logarithmen, S 5.
[15] Lexikon bedeutender Mathematiker. Hrsg. Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgauds, Karl-Heinz Schlote (Frankfurt am Main 1990). S. 476.
[16] Cantor, Geschichte Bd. 2, S. 583, 584.
[17] Edmund Hlawka, Die Mathematik auf dem Weg durch die Zeit. In: Didaktik-Reihe Heft 15, November 1987. Hrsg. Österreichische Mathematische Gesellschaft. S. 114.
[18] Lexikon, Gottwald, Ilgauds, Schlote S. 441.

Die Astronomen des 16. Jahrhunderts benutzten, die im Jahre 1514 von Johannes Werner (1468 - 1528) erfundene prostaphairetische Methode, um die Multiplikation auf eine Addition zurückzuführen, welche auf dem Additionstheorem für Sinus bzw. Cosinus beruht.[19] Diese Methode verwendeten bereits die Araber um 1000 n. Chr. in einem speziellen Fall. Eine Spur findet sich bei Ibn Yûnos (? - 1008), der den Inhalt der Formel

$$\cos\phi \cdot \cos\delta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\phi - \delta) + \cos(\phi + \delta))$$

in Worten angab.[20]

Das Bedürfnis, umständliche Zahlenrechnungen, vor allem die langen Multiplikationen in der Astronomie, in einfachere Rechnungen überzuführen, trug dann endlich zur Entwicklung des Logarithmus bei. Obwohl schon eine an Stifels Gedanken anschließende, einfache theoretische Überlegung den Logarithmus ergeben hätte, war dem nicht so.

2. Die ersten Logarithmentafeln

Es gilt als gesichert, daß sowohl **John Napier (Neper) (1550 - 1617)** als auch **Jost (Justus) Bürgi (1552 - 1632)** über ein halbes Jahrhundert später von Stifel beeinflußt worden sind. Unabhängig voneinander entdeckten beide um 1600 die Logarithmen.

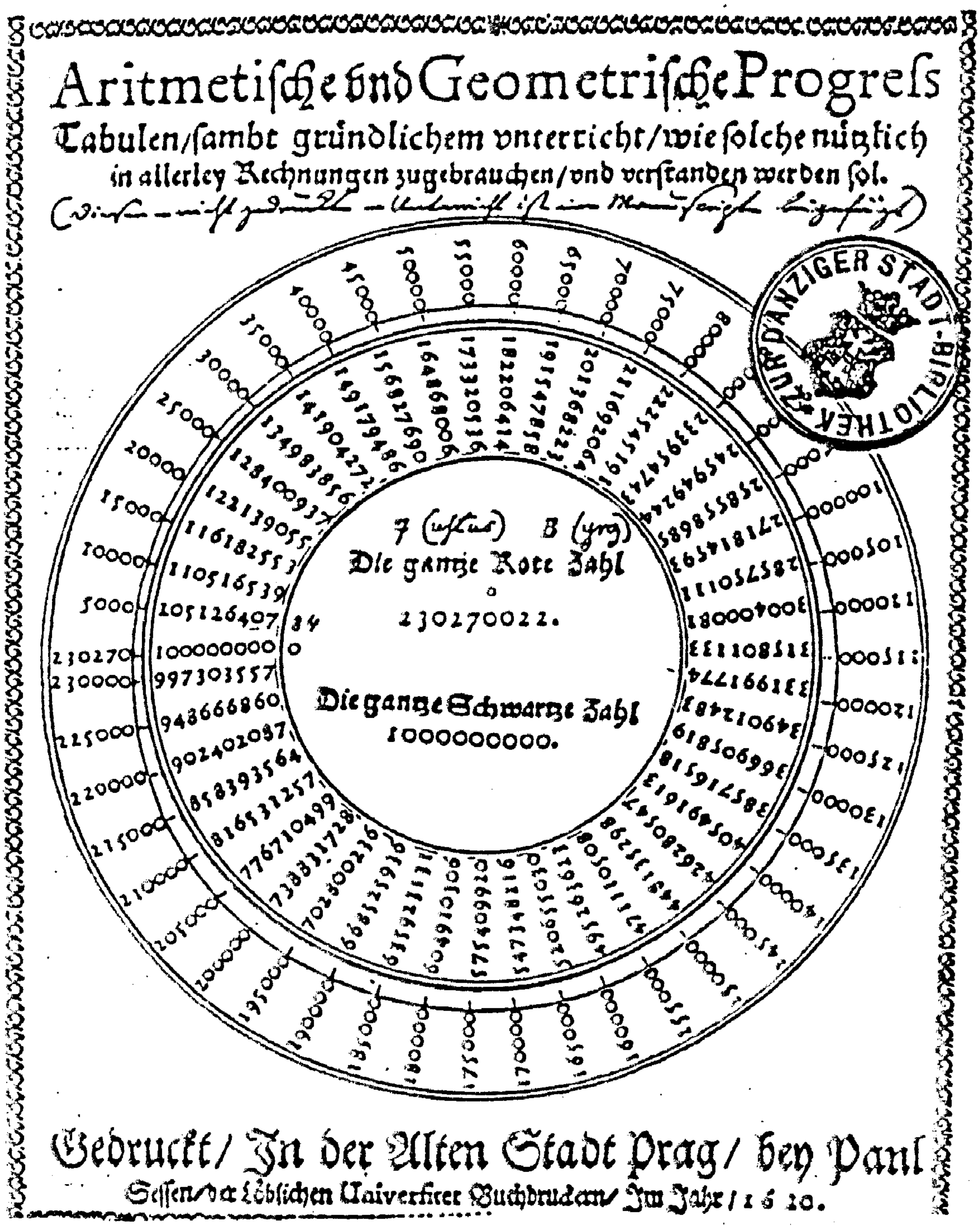
Jost Bürgi wurde am 28. Februar 1552 in Lichtensteig in der Schweiz geboren. "Als Hofuhrmacher des Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen und als Kammeruhrmacher Kaiser Rudolfs II. in Prag verfertigte er Uhren sowie astronomische und mathematische Instrumente. Er versuchte, die Prosthaphairesis zu verbessern, um Rechnungen zu vereinfachen, die beim Bau astronomischer Instrumente erforderlich waren."[21] Die Dezimalbrüche waren ihm nicht bekannt. Da er auch keine Fremdsprache beherrschte, konnte er sie aus den damals bekannten Schriften nicht übernehmen. In seinen eigens erfundenen Dezimalbrüchen kennzeichnete er die Einerziffer durch ein darüber gesetztes Ringlein und verdichtete damit Stifels Reihen.

"Mit seiner Arbeit an den Logarithmen soll Bürgi sehr früh begonnen haben. Genaueres steht in einer Schrift des Astronomen Reimarus Ursus Dithmarsus, 1588: Bürgi besitze ein Mittel, sich seine Rechnungen außerordentlich zu erleichtern."[22] Von diesen Rechenmitteln wußte auch Kepler schon lange vor dem Jahre 1614, in dem Nepers Logarithmen herauskamen, und er drängte Bürgi, mit dem er in Prag zusammenkam, seine Entdeckung doch endlich zu veröffentlichen. Seine "*Arithmetische und Geometrische Progreß-Tabulen*", die allerdings

[19] Kaiser-Nöbauer, Geschichte, S. 37.
[20] A. von Braunmühl, Beitrag zur Geschichte der Prostaphairetischen Methode in der Trigonometrie. S. 105.
[21] Lexikon, Gottwald, Ilgauds, Schlote S. 83.
[22] Voellmy, Logarithmen, S. 17, 18.

erst 1620 erschienen, berechnete er zwischen 1603 und 1611. Dies geht aus einem Bericht seines Schwagers Benjamin Bramer hervor, der während dieser Zeit in Bürgis Haus in Prag lebte.[23] Kepler äußerte über die spätere Drucklegung seinen Unmut, indem er sagte:" Der zaudernde Geheimniskrämer ließ sein neugeborenes Kind im Stich, anstatt es zum allgemeinen Nutzen großzuziehen."[24]

Folgende Abbildung ist eine Kopie des Titelblattes der historisch extrem wertvollen *"Progreß-Tabulen"*.



Aritmetische vnd Geometrische Progreß Tabulen/sambt gründlichem vnterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/vnd verstanden werden sol.

Die gantze Rote Zahl
230270022.

Die gantze Schwartze Zahl
1000000000.

Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul Sessen/der Löblichen Universitet Buchdruckern/ Im Jahr/ 1620.

[23] Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2. Band (Stuttgart [2]1965) S. 732.
[24] Voellmy, Logarithmen, S. 18.

Diese enthält einen Auszug aus den Tabellen in kreisförmiger Anordnung. Die Zahlen des äußeren Kreisringes sind im Original rot gedruckt und laufen beginnend von links im Uhrzeigersinn von 5 000 bis 230 000 in Intervallen von 5 000. Sie stellen somit die Glieder der arithmetischen Folge dar. Im inneren Kreisring findet man die Glieder der zugehörigen geometrischen Folge. Es fällt auf, daß als letzte schwarze Zahl noch 100 000 000 mit der dazugehörigen roten Zahl 230 270 eingefügt wurde. Diese beiden Zahlen findet man im Inneren des Kreisringes wieder, wobei die rote Zahl um die Dezimalstellen 0,022 erweitert wurde. Das Ringlein über der roten Zahl kennzeichnet ihre Einerstelle. Die Tabelle enthält außerdem 2 Druckfehler. Es fehlt im Kreisring der letzten schwarzen Zahl eine Null, und in der darüberstehenden Zahl müßten die Hunderter- und Zehnerstelle 84 anstatt 40 lauten.[25] Der in diesem Titelblatt angekündigte "*sambt gründlichem unterricht*" wurde jedoch nie gedruckt. "Bisher ist nur ein handgeschriebenes Exemplar davon bekannt, das Gieswald auf einen Hinweis des Oberlehrers Gronau aus Danzig in der dortigen Bibliothek gefunden und im "Archiv der Mathematik und Physik, 26 (1856)" abgedruckt hat".[26]

Die nächste Abbildung zeigt den Beginn von Bürgis Tafeln.

	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	10356179[illegible]
10	10000	11277	15067	21381	30234	41637	55603	72141
20	20001	21328	[illegible]	31574	40437	51391	61904	....8[illegible]
30	30003	31380	35271	41683	50641	61146	76216	9226
40	40006	41433	45374	51841	60846	71402	86523	103603221
50	50010	51487	[illegible]	[illegible]	71072	81667	96532	....13[illegible]
60	60015	61543	65584	72158	81129	91932	103107141	23542
70	70021	71599	75691	82309	91467	102603177	17411	34301
80	80028	81656	85799	92467	[illegible]01676	13438	27764	4466
90	90036	91714	95907	101601617	11887	23699	38077	55013
100	100100045	100601773	101106017	11757	22098	33961	48391	65139
110	10055	11834	....1613[illegible]	21940	32310	44325	58705	75776
120	10066	21895	26239	33111	42523	54439	69021	86137
130	30078	31952	36351	43174	52738	64755	79335	96501
140	40091	....4[illegible]	46465	....5[illegible]	62953	75011	89616	10370687[illegible]
150	50105	52084	56580	63604	73169	85289	99975	17241
160	60120	62150	66696	73770	83386	95557	103210295	27613
170	70136	72216	76811	83938	93607	102705817	10616	37986
180	80153	82283	86930	94106	102103274	16097	30937	48361
190	90171	92351	97045	101704275	14045	26369	41161	58734
200	100200190	[illegible]	[illegible]	14446	24266	36641	51525	69111
210	10210	12491	17289	24617	34438	46915	61910	[illegible]
220	20231	22562	27411	34790	44717	57100	72317	....8[illegible]
230	30253	31634	37533	44963	54926	67466	82664	103[illegible]234
240	40276	41707	47657	55135	65162	77742	92891	....[illegible]618
250	50300	52782	57732	65313	75381	88020	103303221	21101
260	60325	62856	67907	75490	85616	98290	13557	31337

Die Anfangsspalten und ersten Zeilen sind im Original wieder rot gedruckt, denn Bürgi kannte den Begriff Logarithmus nicht und sprach immer von roten Zahlen, wenn er praktisch Logarithmen meinte. Der steigenden arithmetischen Folge von der Differenz 10 hat er eine

[25] Voellmy, Logarithmen, S. 18.

[26] Detlef Gronau, Johannes Kepler und die Logarithmen. In: Berichte der Mathematisch - Statistischen Sektion in der Forschungsgesellschaft Joanneum - Graz. (Graz 1987) Bericht Nr. 284 (1987) S. 4.

geometrische Folge vom Quotienten 1,0001 zugeordnet. Um die Tafel übersichtlich zu gestalten, hat er gleichbleibende Ziffern durch Punkte ersetzt. Außerdem hat die Tafel doppelten Eingang, das heißt die letzte Zahl der ersten schwarzen Spalte entspricht der ersten Zahl in der zweiten Spalte usw. . Die riesenhafte Anfangszahl von 10^8 ist laut Bürgis eigenen Angaben als Eins zu lesen.[27] Die großen Anfangsglieder der geometrischen Folge kann man sich daraus erklären, daß die Radiuseinheit im 15. Jahrhundert in den Tabellen des Johannes von Königsberg (Regiomontanus) (1436 - 1476), Joachim von Feldkirch (Rhaeticus) (1514 - 1576) u. a. in schneller Folge von 100 000 auf 10^7, 10^8 bis 10^{10} anwuchs. Weiters bezeichnete man sin 90° damals mit Sinus totus, was dem Radius entsprach und somit den Wert 100 000, 10^7, usw. ergab.[28]

Die Zahlen der geometrischen Folge wurden denkbar einfach berechnet. Unter jede bereits berechnete Zahl setzte man nur ihren zehntausendsten Teil und addierte diesen zur vorhergehenden Zahl. Diese gesetzte Hilfszahl wurde dann wieder ausgelöscht. So einfach erhielt Bürgi die Numeri, die am Rand stehenden roten Zahlen entsprachen den Logarithmen. Die Tabelle ist somit eigentlich eine Antilogarithmentafel. Bürgi war noch weit davon entfernt, die Logarithmen als Potenzen einer festen Basis aufzufassen, aber man kann trotzdem eine Basis bei seinen Logarithmen finden.

Da er die Glieder der geometrischen Reihe y_n durch Addition des zehntausendsten Teiles des vorhergehenden Gliedes y_{n-1} erhielt, kann man folgendermaßen zur Basis gelangen:[29]

$$y_n = y_{n-1} + \frac{y_{n-1}}{10^4} = y_{n-1}\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$$

$$y_2 = y_1\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$$

$$y_3 = y_2\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = y_{n-2}\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$$

$$y_n = y_{n-1}\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)$$

$$y_n = y_1\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{n-1}$$

27 Voellmy, Logarithmen, S. 16.
28 Kewitsch, Basis der Bürgischen und der Neperschen Logarithmen. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 27, 1896. S. 325.
29 Dr. Johannes Tropfke , Geschichte der Elementarmathematik, 2. Band (Berlin/Leipzig ^{3}1933) S. 212.

Werden alle schwarzen Zahlen durch 10^8 dividiert, so erhält man die folgenden beiden Reihen:

0	10	20	30	...
1	$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$	$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2$	$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^3$	...

Dividiert man die Glieder der arithmetischen Reihe durch 10^5, so ergibt sich $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ als Basis. Dies ist also ein Wert, welcher nur um 0,05 Promille unter der damals noch nicht bekannten Eulerschen Zahl $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182818...$ liegt.[30]

Im Zuge des dreißigjährigen Krieges wurden fast alle Exemplare der Progress-Tabulen vernichtet. Die wenigen Käufer dieser Tafeln dürften auf Grund der fehlenden Erläuterungen des "gründlichen Unterrichts" das für sie unbrauchbare Werk weggeworfen haben.[31] Es existieren nur vier Exemplare dieses kostbaren Buches, und zwar befindet sich eines in der Universitätsbibliothek in Graz und je ein weiteres in der Stadtbibliothek in Danzig und in München und eines in der Bibliothek des Vatikans. "Das Grazer und das Danziger Exemplar enthalten einen handschriftlichen Unterricht."[32]

"Auf die Geschichte des Rechnens haben die "Progreß-Tabulen" Bürgis keinen direkten Einfluß ausgeübt. Aber schon zu Lebzeiten wurde Jost Bürgi der zweite Archimedes genannt."[33] Er starb am 31. Jänner 1632 in Kassel, sein Denkmal in Lichtensteig im Toggenburg soll nach den Worten des heimatlichen Geschichtsschreibers J. Fust "der heranwachsenden Jugend ein hervorragendes Beispiel sein, wie Arbeitstüchtigkeit und Arbeitsfreudigkeit zu großen Erfolgen führen können."[34]

John Napier (oder Neper in anderer Schreibweise), Lord von Merchiston, wurde 1550 in Merchiston Castle in Schottland geboren. "Als Gutsherr erfand er mechanische Hilfsmittel für den Ackerbau. Er schaltete sich in die Religionskämpfe gegen die Katholiken ein und veröffentlichte 1593 eine Auslegung der Offenbarung Johannis. Wahrscheinlich hatte Neper bereits 1594 das Prinzip einer Logarithmentafel erfaßt. Es gilt als gesichert, daß er durch die *"Arithmetica integra"* Stifels Anregungen erhielt. Im Jahre 1614 brachte er als erster seine siebenstellige Logarithmentafel *"Mirifici Logarithmorum canonis descriptio ..."* in Edinburgh

[30] Voellmy, Logarithmen, S. 17.
[31] Voellmy, Logarithmen, S. 19.
[32] Gronau, Kepler und die Log., S. 4.
[33] Voellmy, Logarithmen, S. 23.
[34] Ebd. S. 23.

heraus. Die Prinzipien, nach denen er die Tafel aufgestellt hatte, beschrieb er in seiner "*Mirifici Logarithmorum canonis constructio*", die zwar nach der "Descriptio" im Jahre 1619 erschien, aber vor deren Fertigstellung niedergeschrieben war."[35]

Anschließend sieht man die erste Seite der Tabellen aus Nepers *"Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio"*.

Gr. 0

\+ | −

0 min	Sinus.	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	9999999	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	15	9999985	54
7	20362	61966595	61966573	21	9999979	53
8	23271	60631284	60631256	27	9999973	52
9	26180	59453453	59453418	34	9999966	51
10	29088	58399857	58399814	42	9999958	50
11	31997	57446759	57446707	51	9999949	49
12	34906	56576646	56576584	6[illegible]	9999939	48
13	37815	55776222	55776149	72	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	83	9999917	46

Nepers Tafel hat den Charakter einer logarithmisch trigonometrischen Tafel. Für die Numeri wählte er die Sinuswerte der Winkel von 0° bis 90°. In den beiden äußersten Spalten findet man die Minuten, in den nächstinneren Spalten stehen die zugehörigen Sinus- bzw. Cosinuswerte. Die Logarithmen der entsprechenden trigonometrischen Funktionen findet man in den Spalten Logarithmi, die Differentia-Spalte enthält den Logarithmus vom Tangens des entsprechenden Winkels. Für Winkel über 45° dient die rechts unten angebrachte Gradbezeichnung und die Minutenangabe auf der rechten Seite. Auf Grund der Beziehung sin (90° - α) = cos α kann der ersten Spalte der Sinus und der letzten Spalte der Cosinus des entsprechenden Winkels entnommen werden.

Die Berechnung der Logarithmen findet man in *"Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio"*. Im Gegensatz zu Bürgi findet man bei Neper das Wort Logarithmus. Es wurde von ihm selbst gewählt und hängt offenbar mit der griechischen Lehre von den Verhältnissen zusammen, da es aus dem Griechischen λογον αριδμοζ stammt.[36]

[35]Lexikon, Gottwald, Ilgauds, Schlote S. 338.
[36]Tropfke, Geschichte 2. Bd. S.250.

Nepers Logarithmen sollten zur Vereinfachung der Rechnungen in der sphärischen Trigonometrie dienen. Er ordnete den geometrisch abnehmenden Sinuswerten oder natürlichen Zahlen ihre "künstlichen", arithmetisch wachsenden Zahlen zu. In *"Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio"* wird zuerst erklärt, wie er die Glieder der geometrischen Folge berechnete. Ausgehend vom Sinus totus mit 7 Nullen wird der zehnmillionste Teil abgezogen, um das nächste Glied der geometrischen Reihe zu erhalten. Diese Berechnungsart setzte er fort, sodaß er für das 101. Folgenglied den Wert 9 999 900,0004950 erhielt.

In einer weiteren geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied 10 000 000 wird der 100 000 Teil abgezogen, um die folgenden Glieder zu erhalten, als 50. Proportionalzahl wird 9 995 001,111927 angegeben. Die Rechnung in *"Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio"* zeigt jedoch, daß das Anfangsglied 1 000 000 sein sollte.

Schließlich findet man noch eine dritte Folge, deren erstes Glied wieder 10 000 000 ist. Von jedem Glied dieser Folge wird der 2000. Teil abgezogen, um das nächstfolgende Glied zu erhalten. Der Quotient bei dieser Reihe ist daher 0,9995, und das 21. Glied beträgt 9 900 473,57808.[37]

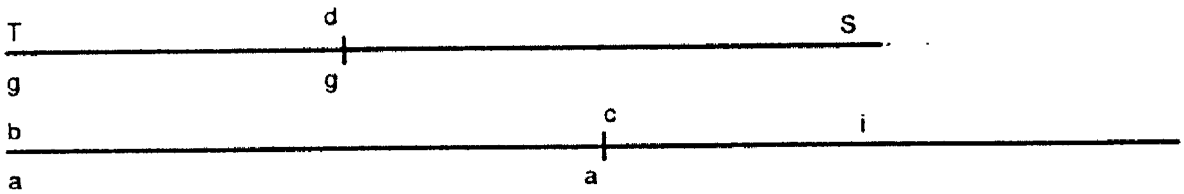
Zur Vorausberechnung der Glieder dieser 3. Folge bildete er noch eine vierte, bei der er das 2. Glied 9 900 000 setzte und jedes folgende um den 100. Teil des vorhergehenden verkleinerte. Beim 70. Glied, das kleiner als 5 000 000 wurde, brach er die Folge ab.

Die Intervalle der 4. Folge wurden mit den Gliedern der 3. Folge, diese dann mit denen der zweiten Folge, und die Lücken dieser mit jenen der ersten Folge aufgefüllt. Diese Folge benutzte Neper dazu, um die Logarithmen der Sinuswerte zwischen 90° und 30° durch Einschaltung zu bestimmen. Sin 90° setzte er 10 000 000, und somit ist sin 30° gleich 5 000 000.[38] Damit zeigte er, wie man Sinus- oder natürliche Zahlen, welche in geometrischen Verhältnissen abnehmen, leicht in Tafeln bringen kann. Er erhielt somit eine fallende geometrische Folge, deren Quotient $q = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$ war. In der arithmetischen Folge ließ er das Anfangsglied 0 und setzte $d = 1$. Diese neuen "Kunstzahlen" bezeichnete er später als "Verhältniszahlen" bzw. "Logarithmen". Allgemein kann man daher die Glieder der arithmetischen Folge mit $x = n$ bzw. jene der geometrischen Folge mit $y = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ bezeichnen.[39]

---

[37] John Neper, Mirifici Logarithmorum canonis constructio. Hrsg. Mark Neper (Edinburgh 1620) S. 10.
[38] Tropfke, Geschichte Bd. 2, S. 238.
[39] Kewitsch, Basis d. Log., S. 326.

Neper kleidete seine zwei Zahlenfolgen in das Bild zweier sich bewegender Punkte ein und erklärte dies an Hand folgender Strecken[40]:



Die Strecke TS sei der Sinus totus und dS ein gegebener Sinus. Ein Punkt g bewege sich geometrisch von T nach S. Die geometrische Bewegung kann folgendermaßen verstanden werden.

In der 1. Zeiteinheit wird $\frac{1}{m}$ des ganzen Weges zurückgelegt, in jeder weiteren Zeiteinheit wird somit jeweils der m. Teil des noch übrigen Weges zurückgelegt, sodaß nach jeder Zeiteinheit noch folgende Wege verbleiben:

$$\frac{m-1}{m},\quad \left(\frac{m-1}{m}\right)^2,\quad \left(\frac{m-1}{m}\right)^3, \ldots .$$

Auf der zweiten Geraden bewegt sich der Punkt a von b nach i arithmetisch, sodaß in jeder Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ Teile des gesamten Weges zurückgelegt werden. Ist dieser bewegliche Punkt in c, wenn er auf der ersten Strecke in d ist, so heißt die Zahl, die die Linie ba angibt, "numerus artificialis" des Sinus dS.[41] Die durchflossenen Wege am zweiten Strahl sind in jeder Zeiteinheit gleich. Die vom Anfang der Bewegung bis zum Ende jeder Zeiteinheit zurückgelegten Entfernungen bilden jeweils ein Glied der arithmetischen Folge und stellen somit einen Logarithmus dar.

Damit hatte Neper zwei Folgen von entgegengesetzter Wachstumsrichtung konstruiert. Auch er kannte so wie Bürgi den Begriff der Basis nicht.

Durch folgende Überlegung läßt sich jedoch leicht folgende Basis finden. Da dem 1. Glied $\frac{1}{m}$ der arithmetischen Folge der noch verbleibende Weg $\frac{m-1}{m}$ entspricht, kann man $a^{\frac{1}{m}} = \frac{m-1}{m}$ und $a = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ setzen. Bildet man $\lim\limits_{m \to \infty}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$, so erhält man für $a = \frac{1}{e}$.

Im Appendix der *"Constructio"* wurde hinzugefügt, daß es bequemere Logarithmen als die bisher berechneten geben würde, wobei 0 der Logarithmus von 1 sowie 1 der Logarithmus

[40] Neper, Constructio, S. 14.
[41] Abraham Kästner, Geschichte der Mathematik bis an das Ende des 18. Jahrhunderts. (Göttingen 1796 - 1800) S. 77.

von 10 mit beliebig vielen Nullen wäre. Er erläuterte weiters, daß $0{,}2 = \log\left(\sqrt[5]{10}\right)$, $0{,}04 = \log\left(\sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}\right)$ usw. bis zum zehnmaligen Ziehen von Wurzeln 5. Grades wäre. Er berechnete jedoch keine Logarithmen ~~nach diesem~~ Vorschlag. Es wird vermutet, daß ihm dafür der Rechenaufwand zu hoch erschien.[42]

"Nach Diskussion mit dem Engländer **Henry Briggs (1561 - 1630)** traf Neper die Festlegung, der Zahl 10 den Logarithmus 1 zuzuordnen, und die Zahlen mit den Logarithmen wachsen zu lassen. Dabei entwickelte er bereits einen Gedankengang über den multiplikativen Zusammenhang zweier Logarithmensysteme, indem er erklärte, die Zahl 2,3025482 (seinen Logarithmus von 10) durch 1,0000000 zu ersetzen."[43]

Neper starb am 3. April 1617 in Merchiston Castle. Noch in seinem Todesjahr erschienen Tabellen mit diesen "Brigg'schen Logarithmen", welche von Briggs in seinem *"Logarithmorum chilias prima"* (Logarithmen der tausend ersten Zahlen) herausgegeben wurden.[44] In diesen Tafeln findet man die ersten dekadischen Logarithmen mit 14 Stellen.

Im Jahre 1624 erschien von Briggs die *"Arithmetica logarithmica"*, welche vierzehnstellige dekadische Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000 enthält.

Die Lücke zwischen 20 000 und 90 000 wurde durch den holländischen Buchhändler **Adriaen Vlacq (1600? - 1667?)** geschlossen. Sein im Jahre 1628 erschienenes Werk mit dem Titel *"Arithmetica logarithmica"* enthält eine Tafel der "Brigg'schen Logarithmen" für die Numeri von 1 bis 100 000. Die bekannten Werte von Briggs verkürzte er um 4 Stellen, die fehlenden berechnete er auf 10 Stellen. Im Anhang dieses Werkes ist zusätzlich noch eine logarithmisch-trigonometrische Tabelle für die damals üblichen 6 trigonometrischen Funktionen zu finden. Die Übersichtlichkeit und Anordnung dieses Werkes wurde als Vorbild für viele spätere Tafeln genommen, wie auch an der Fehlerfortpflanzung erkennbar ist. Einige der 171 Fehler in den ersten 7 Stellen bei Vlacq hielten sich bis zum 19. Jahrhundert. 1633 erschien von Vlacq eine Tafel der Brigg'schen Logarithmen für die 4 trigonometrischen Funktionen mit einer Schrittweite von 10 Sekunden. Vlacq hat mit seiner rechnerischen und buchhändlerischen Tätigkeit entscheidend zur schnellen Ausbreitung der Brigg'schen Logarithmen beigetragen.[45]

Der Mathematikprofessor **Benjamin Ursinus (1587 - 1634)** an der Universität Frankfurt an der Oder war einer der ersten, der Nepersche Logarithmen in Deutschland bekannt machte.[46]

---

[42] Cantor, Geschichte Bd. 2, S. 737.
[43] Tropfke, Geschichte Bd. 2, S. 259.
[44] Lexikon, Gottwald, Ilgauds, Schlote, S. 76.
[45] Lexikon, Gottwald, Ilgauds, Schlote, S. 478.
[46] Cantor, Geschichte Bd. 2, S. 739.

Nepers Werke wurden wesentlich mehr verbreitet und waren somit auch bekannter als Bürgis Progress-Tabulen.

Aber auch **Johannes Kepler (1571 - 1630)** bemühte sich ab dem Jahr 1620 um die Verbreitung der Neperschen Logarithmen. Es fällt auf, daß der Beginn seiner Bemühungen mit dem Erscheinen von Bürgis Progresstafeln zusammenfällt. Kepler hielt sich von 1605 bis 1612 in Prag auf. Dort lernte er Bürgi persönlich kennen und pflegte auch wissenschaftliche Kontakte mit ihm. Es scheint daher eher eigenartig, daß durch Kepler die Neperschen Logarithmen sogar verbreitet wurden, während er jene von Bürgi nicht einmal erwähnte. Es wird vermutet, daß Kepler über die späte Drucklegung von Bürgis Tafeln erzürnt war. Die Neperschen Tafeln hielt Kepler für sehr wichtig, obwohl ihm die geometrisch-mechanische Einkleidung in der *"Descriptio"* nicht besonders gefiel. "Auch die Anordnung der Neperschen Tafel nach gleichmäßig wachsenden Winkelgraden, deren trigonometrische Funktionen eine sich nicht gleichmäßig ändernde Zahlenreihe bildeten, sagte ihm nicht zu."[47] "Im Zuge der Erstellung der *"Tabulae Rudolphinae"* verfaßte er selbst Werke über die Logarithmen, in denen er eigene Tabellen berechnete und eine theoretische Begründung der Logarithmen veröffentlichte."[48] Kepler bestimmte seine Logarithmen durch fortgesetzte, mittlere geometrische Proportionalzahlen und ließ die Zahlen in arithmetischer Progression zunehmen. Auch bei ihm gehörte zur größeren Zahl der kleinere Logarithmus.

Keplers Lehrer Michael Mästlin (1550 - 1631) hatte eine ganz negative Haltung zum Rechnen mit Neperschen Logarithmen. Unter anderem führte auch dies Kepler zu dem Entschluß, "eine für die Publikation gedachte Theorie der Neperschen Logarithmen zu schaffen und dadurch die zögernden Mathematiker der strengen euklidischen Observanz von der Gültigkeit des logarithmischen Rechnens zu überzeugen."[49]

Kepler vollendete im Jahre 1622 seine erste Logarithmentafel, die die Logarithmen für die Zahlen 1 bis 1 000 enthielt. Dieser fügte er eine *"Demonstratio structurae logarithmorum"* in 30 Lehrsätzen bei, die er zur Prüfung seinem früheren Lehrer Mästlin schickte, der diese zur Herausgabe empfehlen sollte. Doch dieser erfüllte Keplers Wunsch nicht, erst mit Hilfe des Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach konnte dieses Werk im Jahre 1624 gedruckt werden.[50] Im Zuge der Erstellung seiner *"Tabulae Rudolfina"*, die 1627 herausgegeben wurden, erkannte er die Bedeutung der Logarithmen und stellte diese noch von Prostaphairese auf diese neue Rechnungsart um. Gutzmer sagte in seiner Festrede zum dreihundertjährigen Jubiläum der Logarithmen: "Vielleicht war es ein Glück, daß Kepler seine mühevolle Arbeit vollendet hatte, ehe er die Logarithmen kennenlernte, denn sonst wäre er infolge der

[47] Cantor, Geschichte Bd. 2, S. 740.
[48] Gronau, Kepler u. d. Log., S. 1.
[49] Franz Hammer, Nachbericht zu den logarithmischen Schriften von Johannes Kepler. In: Johannes Kepler, Gesammelte Werke Bd 9, (München 1960).
[50] Cantor, Geschichte Bd. 2, S. 741.

Bemühungen, die Tafeln brauchbarer zu machen, wohl nicht zur Erledigung der Untersuchungen über die Planetenbahnen gekommen."[51]

Im Jahre 1700 wurden von seinem Schwiegersohn Jacob Bartsch Tafeln mit dem Titel "Tabulae manuales logarithmicae ad calculum Astronomicum ..." herausgegeben.

Sowohl bei Bürgi als auch bei Neper findet man den Begriff der Funktion des Logarithmus nicht. Herr Prof. Gronau von der Universität Graz machte beim Durchstöbern der logarithmischen Schriften von Johannes Kepler folgende interessante Entdeckung: "Durch das Erscheinen der "Chilias Logarithmorum" (Marburg 1624) und dem "Supplementum Chiliadis Logarithmorum" (Marburg 1625) hat der Begriff des Logarithmus als Funktion in die mathematische Literatur Einzug gehalten, wobei auch folgende Funktionalgleichung $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ auftritt und zur Berechnung der Logarithmen herangezogen wird."[52] Kepler nannte diese Funktion allerdings nicht Logarithmus sondern Maß (mensura). Der Begriff der Funktion wird bei Kepler insofern erkennbar, indem er Proportionen durch normale Größen miteinander verknüpfte. Dieses Maß erfüllt die Funktionsgleichung $M(x \cdot y) = M(x) + M(y)$ oder die eingeschränkte Art $M(x) = 2 \cdot M(x)$. Es ist nicht geklärt, welche der beiden Gleichungen zuerst verwendet wurde. Mit normalen Größen meinte er reelle Zahlen und hatte somit eine Funktion auf der Menge der positiven reellen Zahlen eingeführt, von der sich herausstellen wird, daß sie bis auf einen Faktor von einer Zehnerpotenz der natürliche Logarithmus ist. Aus einer Proposition bezüglich des geometrischen Mittels zweier Terme kann man folgern, daß das Maß für alle positiven reellen Zahlen die Funktionalgleichung $f(x^2) = 2 \cdot f(x)$ erfüllt. Diese Gleichung besitzt bekanntlich den Logarithmus als einzige stetige Lösung. Allgemein formulierte er für das Maß $M(x) = c \cdot \log(x)$, daß es in der abgeleiteten Form in einem fixen Punkt z den Wert 1 haben sollte. Dies ergibt für das Maß $M(x) = z \cdot \log(x)$. In seinen Schriften verwendete Kepler für die Konstante z verschiedene Werte. Im "Exemplum Sectionis" nahm er für z den Wert 10^{20}, in der Definition den Wert 1 000 und zum Schluß in den Logarithmentafeln und im Anhang den Wert 10^7. In seinen Definitionen führte er den Logarithmus folgendermaßen ein:

$$L_K(y) = M\left(\frac{z}{y}\right),$$

und daher ergibt sich, falls $z = 10^7$,

$$L_K(y) = 10^7 \cdot \log \frac{10^7}{y}.$$

Er erhielt ungefähr den gleichen Logarithmus, das heißt etwa die gleichen Zahlen wie Neper, sie sind jedoch deshalb nicht genau gleich, da Kepler theoretisch von anderen

[51] Gutzmer, Jubiläum d. Log., S. 11.
[52] Gronau, Kepler u. d. Log. S. 4.

Grundannahmen ausging, und auch seine Rechenmethoden gegenüber denen von Neper genauer waren.[53]

Die seit 1633 erschienenen, rein logarithmischen Tafeln gehen fast alle auf Vlacq zurück, was man auch auf Grund der Fehlerfortpflanzung feststellen kann. Im Laufe der Zeit entwickelten sich verschiedene Berechnungsmethoden für die Logarithmen.

3. Berechnungsmethoden für Logarithmen

Henry Briggs (1561 - 1630) bediente sich zur Berechnung der Logarithmen der nachfolgend beschriebenen Methode. Um den Logarithmus einer Zahl zu suchen, wurde diese zwischen den 2 benachbarten Potenzen von 10 eingeschlossen. Von diesen 2 Grenzen nahm er nun den Logarithmus und berechnete überdies ihre mittlere geometrische Proportionale und von der letzteren den Logarithmus nach der Formel

$$\log x = \log \sqrt{10^n \cdot 10^{n+1}} = \frac{(2n+1)}{2},$$

wodurch die gegebene Zahl und deren Logarithmus in engere Grenzen eingeschlossen wurden. Wird nun diese Verfahren hinreichend oft wiederholt, so kann man sich der gegebenen Zahl und dem zugehörigen Logarithmus auf jeden beliebigen Genauigkeitsgrad nähern.[54]

Gregorius von Sanct Vincentius (1584 - 1667) erkannte, daß bei einer gleichseitigen Hyperbel die Abschnitte der zu einer Asymptote gezogenen Parallelen zwischen Hyperbel und Asymptote eine geometrische Reihe bilden.

Sein Schüler **A. A. De Sarasa (1618 - 1667)** folgerte, daß diese Flächenstücke durch Logarithmen ersetzt werden könnten. Etwas später erkannte dies auch **Pierre Fermat (1601 - 1665)**. In der Weiterentwicklung dieses Satzes gelangte 1667 **Nicolaus Mercator (1620 - 1687)** zu einer unendlichen Reihe, indem er die Hyperbelgleichung $y = \frac{1}{1+a}$ und $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$ setzte. Die Integrationsmethoden dieser Zeit waren bereits soweit fortgeschritten, daß Mercator die Glieder dieser Reihe einzeln integrieren und somit die logarithmische Reihe entdecken konnte. Die Logarithmen, welche durch die Reihe

[53] Detlef Gronau, The Logarithms - From Calculation to Functional Equations. In: Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Neuhofen an der Ybbs, 22. - 28. 10. 1989, Hrsg. Christa Binder, S. 7.

[54] Jakob Cebular, Berechnung der Brigg'schen und Neperschen Logarithmen. In: Jahresbericht der Oberrealschule Görz 1875/2, S. 12.

$$\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$$

definiert wurden, bezeichnete Mercator mit "Logarithmus naturalis". Diese Bezeichnung trat bei Mercator zum ersten Mal auf. Er nannte diese auch "logarithmi non tabulares", im Gegensatz zu den Brigg'schen, den "logarithmi tabulares", die auch später als künstliche Logarithmen bezeichnet wurden. Allerdings kommt diese Reihe bei Mercator nicht explizit vor, man findet jedoch die abermalige Integration

$$\int_0^a \log(1+a)da = \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2\cdot 3} + \frac{a^4}{3\cdot 4} - \ldots$$

ausgeführt, welche jedoch nur durch Ersetzen des Logarithmus durch seine Potenzreihe möglich war.

Bei ihm findet man auch die Bemerkung, daß sich die natürlichen Logarithmen zu den Brigg'schen wie 1 zu 4,3429448 verhalten. Diese Multiplikationskonstante nannte im Jahre 1712 **R. Cotes (1652 - 1716)** Modulus und zeigte auch sofort ihre Anwendung, indem er durch Multiplikation der natürlichen Logarithmen mit dieser Konstante die Brigg'schen Logarithmen berechnete.[55]

Zur selben Zeit wie Mercator beschäftigte sich auch **Isaac Newton (1643 - 1727)** mit Reihen, die jedoch erst 1711 gedruckt wurden, obwohl seine Erkenntnisse schon im Jahre 1666 erfolgten. Für viele Mathematiker bildeten Mercators Entdeckungen die Grundlage für die weitere Entwicklung der Theorie der logarithmischen Reihe.

Edmond Halley (1656? - 1743) stellte folgende Reihe in dieser "Schreibart selbst auf:

$$\log\frac{a}{b} = \frac{2x}{z} * + \frac{2x^3}{3z^3} * + \frac{2x^5}{5z^5} * + \frac{2x^7}{7z^7} \&,$$

wo $z = a + b$, $x = a - b$ gesetzt ist und der Stern * fehlende Glieder andeutet".[56] In Halleys Abhandlungen wird zum erstenmal die Mercatorsche Reihe mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes entwickelt. Dabei ging er auf folgende Weise vor:

Um das Verhältnis zweier Zahlen genauer darzustellen, betrachtete er Teile davon. Zwischen zwei natürliche Zahlen wurden mittlere Proportionale eingeschoben, die als Potenzen der Grundzahl aufgefaßt, Exponenten besitzen, deren Differenz $\frac{1}{n}$ beträgt, wobei n eine sehr groß gewählte natürliche Zahl darstellt.

---

[55] Tropfke, Geschichte Bd. 2, S. 258.
[56] Ebd. S. 260.

Ist a die Basis und $1 + q$ eine reelle Zahl, so wird $a^{\frac{m}{n}} = 1 + q$ und $a^{\frac{1}{n}} = (1 + q)^{\frac{1}{m}}$, $a^{\frac{1}{n}} - a^0 = (1 + q)^{\frac{1}{m}} - 1$. Aber die kleine Differenz $a^{\frac{1}{n}} - a^0$ läßt sich, wenn a und n gegeben sind, als Vielfaches von $\frac{1}{n}$, etwa als $\frac{k}{n}$ berechnen, wodurch k selbst bekannt wird. Nachdem $\frac{k}{n}$ als Wert von $(1 + q)^{\frac{1}{m}} - 1$ erkannt ist, wird auf $(1 + q)^{\frac{1}{m}}$ der binomische Lehrsatz angewendet. Man erhält $(1 + q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m} \cdot q + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{1 \cdot 2} q^2 + \ldots$. Ist m sehr groß, so dürfen in den Binomialkoeffizienten höhere Potenzen von $\frac{1}{m}$ weggelassen werden, und Halley erhielt:

$$(1 + q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}q - \frac{1}{2m}q^2 + \frac{1}{3m}q^3 - \ldots$$

$$\frac{k}{n} = (1 + q)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}\left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \ldots\right)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{k}\left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \ldots\right)$$

$$\log(1+q) = \frac{1}{k}\left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \ldots\right)$$

$$\log \frac{1 + q}{1 - q} = \frac{2}{k}\left(q + \frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{5}q^5 + \ldots\right)$$

Aus $\frac{1 + q}{1 - q} = \frac{a}{b}$ und $q = \frac{a - b}{a + b}$ mit $a - b = x$ und $a + b = z$ erhält man Halleys Reihe:

$$\log \frac{a}{b} = \frac{1}{k}\left(\frac{2x}{z} + \frac{2x^3}{3z^3} + \frac{2x^5}{5z^5} + \frac{2x^7}{7z^7} + \ldots\right)$$

Für die Basis 10 hat k den Wert 2,302585 und für $a = e$ wird $k = 1$.

Georg Vega (1756 - 1802) nahm eine Revision der alten Logarithmenberechnung vor, indem er die Halleysche Reihe umformte.

Das Verfahren von **John Long (1714)** hat vielfach in neueren Schulbüchern Eingang gefunden.[57] Er verwendete die dekadischen Wurzeln aus 10, und aus

$$a = 10^n \cdot 10^{\frac{\alpha}{10}} \cdot 10^{\frac{\beta}{100}} \cdot 10^{\frac{\gamma}{1000}} \ldots$$

[57] Tropfke Geschichte S. 241

erhielt er log a = n,$\alpha\beta\gamma$ ... . α eruierte man, indem man aus einer Tafel der ersten bis neunten Potenzen von $\sqrt[10]{10}$ die nächstniedrige Potenz von $\frac{a}{10^n}$ aufsuchte. Analog bestimmte man β aus einer Tafel der Potenzen von $\sqrt[100]{10}$ und der nächstniedrigeren Potenz von $\frac{a}{10^n \cdot 10^{\frac{\alpha}{10}}}$.

Die Methode des Kettenbruchverfahrens zur Berechnung der Logarithmen stammt von **Brook Taylor (1685 - 1731).** Ist z. B. log 2 zu berechnen, so setzt man[58]

$10^{\frac{1}{x}} = 2$ und findet aus $10 = 2^x$ für x einen Wert größer als 3. Aus $x = 3 + \frac{1}{y}$ folgt $10 = 2^{3+\frac{1}{y}} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{y}}$, $1{,}25^y = 2$. Durch Berechnen der Potenzen von 1,25 erkennt man, daß y größer als 3 ist, und setzt man dieses Verfahren wie folgt fort, so erhält man:

$$y = 3 + \frac{1}{z}, \quad z = 9 + \frac{1}{u}, \quad u = 2 + \frac{1}{v}$$

$$\log 2 = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}}$$

Als Näherungsbrüche ergeben sich: $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{28}{93}, \frac{59}{196}, \frac{146}{485}, \frac{643}{2136}, \dots$.

Dieses Verfahren wurde 1717 von Taylor in den "*Philosophical Transactions*" veröffentlicht.

"Unsere heutige Exponentendefinition des Logarithmus findet sich erstmalig in einer nicht publizierten Schrift **Leonhard Eulers (1707 - 1783)** aus dem Jahre **1728**. Dort verwendete Euler e als Basis für die Logarithmen."[59] In seiner "*Introductio*" erklärte er den Logarithmus folgendermaßen:

Wenn $y = a^z$, dann ist y eine Funktion von z. Zu einer gegebenen Konstanten a kann man zu jedem Wert von z den Wert von y finden, sodaß $a^z = y$. Dieser Wert von z, soweit er als Funktion von y gesehen werden kann, wird der Logarithmus von y genannt. Die Konstante a ist die Basis des Logarithmus. Es hat sich eingebürgert, den Logarithmus von y durch das Symbol log y zu bezeichnen. Welche Basis man auch immer wählt, man erhält log 1 = 0.[60]

---

[58] Ebd. S. 242.
[59] Kaiser-Nöbauer, Geschichte, S. 93.
[60] Euler, Introduction to Analysis of the Infinite. Book I. Translated by John D. Blanton (New, York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo 1988). S. 78, 79.

4. Schluß

Es wäre zu wünschen, wenn viele Kolleginnen und Kollegen diesen Vortrag, nicht nur um der Lehrplanforderung gerecht zu werden, im Unterricht verwenden würden. Er kann nicht nur in der 6. Klasse bei der Einführung der Logarithmen dienen, sondern einzelne Teile können bereits in der ersten Klasse bei der Erarbeitung der Dezimalzahlen oder in der 3. Klasse bei der Einführung von Potenzen verwendet werden. Außerdem kann durch das Einstreuen historischer Bemerkungen der Unterricht immens aufgelockert und die Motivation der Schüler beachtlich gesteigert werden.

Literatur

Bourbaki Nicolas: Elemente der Mathematikgeschichte. (Göttingen 1971).

Braunmühl A.: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Teil 1. 2. (Leipzig 1900 - 1903).

Cantor Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 2, 3. (Stuttgart [2]1965).

Euler Leonhard: Introduction to Analysis of the Infinite. Book I. Translated by John D. Blanton. (New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo 1988).

Hlawka Edmund: Die Mathematik auf dem Weg durch die Zeit. In: Didaktik-Reihe, Heft 15, November 1987. Hrsg. Österreichische Mathematische Gesellschaft.

Kaiser Hans - Nöbauer Wilfried: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. (Wien 1984).

Kästner Abraham: Geschichte der Mathematik bis an das Ende des 18. Jahrhunderts. (Göttingen 1796 - 1800).

Lexikon bedeutender Mathematiker, Hrsg.: Gottwald Siegfried, Ilgauds Hans-Joachim, Schlote Karl-Heinz. (Frankfurt 1990).

Neper John: Mirifici Logarithmorum canonis constructio. Hrsg. Mark Neper. (Edinburgh 1620).

Struik Dirk J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. (Berlin [6]1976).

Sturm Ambros: Geschichte der Mathematik bis zum Anfang des 18. Jhdts. (Leipzig [2]1911).

Tropfke Johannes: Geschichte der Elementarmathematik, 2. Band. (Berlin/Leipzig [3]1933).

Wussing H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. (Berlin 1979).

Anschrift der Verfasserin:

Mag. Dr. Gerlinde Faustmann

BRG
Gröhrmühlgasse 27
2700 Wiener Neustadt